Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2017 года

ОТВЕТЫ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Задача 1.

Какое число больше: $\sqrt{\frac{6}{7}+7+\frac{7}{6}}$ или 3?

Ответ: Первое больше

Какое число больше: $\sqrt{\frac{7}{8}+7+\frac{8}{7}}$ или 3?

Ответ: Первое больше

Какое число больше: $\sqrt{\frac{7}{9}+7+\frac{9}{7}}$ или 3?

Ответ: Первое больше

Какое число больше: $\sqrt{\frac{8}{9}+7+\frac{9}{8}}$ или 3?

Ответ: Первое больше

Задача 2.

Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac=4$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

Ответ: 17

Известно, что $a+b+c=6$ и $a^2+b^2+c^2=16$. Найдите $ab+bc+ac$.

Ответ: 10

Известно, что $a+b+c=4$ и $ab+bc+ac=5$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

Ответ: 6

Известно, что $a+b+c=7$ и $a^2+b^2+c^2=19$. Найдите $ab+bc+ac$.

Ответ: 15

Задача 3.

Решите уравнение $\sin 7x+\sin 6x=\sin x$.

Ответ: $x=\frac{k\pi}{3},\ \frac{(2k+1)\pi}{7},\ k\in\mathbb{Z}$

Решите уравнение $\cos 6x+\cos 5x=\sin x$.

Ответ: $x=(2k+1)\pi,\ \frac{(1+4k)\pi}{12},\ \frac{(-1+4k)\pi}{10},\ k\in\mathbb{Z}$

Решите уравнение $\sin 8x-\sin 7x=\sin x$.

Ответ: $x=\frac{k\pi}{4},\ \frac{2k\pi}{7},\ k\in\mathbb{Z}$

Решите уравнение $\cos 8x-\cos 9x=\sin x$.

Ответ: $x=2k\pi,\ \frac{(1+4k)\pi}{18},\ \frac{(1+4k)\pi}{16},\ k\in\mathbb{Z}$

Задача 4.

Решите неравенство $x^2\log_7^2 x + 3\log_6^2 x \leqslant x\log_7 x \cdot \log_6 x^4$.

Ответ: $x=1,\ \log_6 7 \leqslant x \leqslant 3\log_6 7$

Решите неравенство $x^2\log_6^2 x + 6\log_5^2 x \leqslant x\log_6 x \cdot \log_5 x^5$.

Ответ: $x=1,\ 2\log_5 6 \leqslant x \leqslant 3\log_5 6$

Решите неравенство $x^2\log_5^2 x + 5\log_4^2 x \leqslant x\log_5 x \cdot \log_4 x^6$.

Ответ: $x=1,\ \log_4 5 \leqslant x \leqslant 5\log_4 5$

Решите неравенство $x^2\log_4^2 x + 10\log_3^2 x \leqslant x\log_4 x \cdot \log_3 x^7$.

Ответ: $x=1,\ 2\log_3 4 \leqslant x \leqslant 5\log_3 4$

Задача 5.

Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямых AC и BC. На этой окружности выбрана точка D (внутри треугольника), лежащая на расстоянии $\sqrt{2}$ от прямой AB и на расстоянии $\sqrt{5}$ от прямой BC. Найдите угол $\angle DBC$, если известно, что $\angle ABD = \angle BCD$.

Ответ: $\pi/4$

Через вершины K и L треугольника KLM проведена окружность, касающаяся прямых KM и LM. На этой окружности выбрана точка S (внутри треугольника), лежащая на расстоянии 1 от прямой KL. Найдите расстояние от точки S до прямой LM, если известно, что $\angle KLS = \angle LMS$ и что $\angle SLM = 45°$.

Ответ: $\sqrt{5/2}$

Через вершины A и C треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямых AB и BC. На этой окружности выбрана точка D (внутри треугольника), лежащая на расстоянии 1 от прямой AC и на расстоянии $\sqrt{7}$ от прямой AB. Найдите угол $\angle DAB$, если известно, что $\angle CAD = \angle ABD$.

Ответ: $\pi/3$

Через вершины M и K треугольника KLM проведена окружность, касающаяся прямых ML и KL. На этой окружности выбрана точка S (внутри треугольника), лежащая на расстоянии $\sqrt{2}$ от прямой MK. Найдите расстояние от точки S до прямой KL, если известно, что $\angle MKS = \angle KLS$ и что $\angle SKL = 60°$.

Ответ: $\sqrt{14}$

Задача 6.

Василий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться вниз по реке до пункта B, причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Василий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A. Однако, промчавшись восемь километров, Василий заметил на берегу машущего ему рукой Григория, который просил по старой дружбе довезти его до пункта C. И хоть пункт C Василий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Василий с Григорием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Василия, откуда те крикнули, что им до пункта B осталась треть пути и чтобы Василий нигде не задерживался. Доставив Григория в пункт C, Василий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами B и C, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, скорости катеров постоянны, а Василий, действительно, нигде не задерживался.

Ответ: 4 км

Анатолий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта А нужно добраться вверх по реке до пункта В, причем, в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Анатолий вызвался самостоятельно доехать до пункта В на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта А. Однако, промчавшись 8 км, Анатолий заметил на берегу машущего ему рукой Бориса, который просил по старой дружбе довезти его до пункта С. И хоть пункт С Анатолий уже проехал, он согласился. По пути в пункт С Анатолий с Борисом встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Анатолия, откуда те крикнули, что пункт В уже совсем близко и чтобы Анатолий нигде не задерживался. Доставив Бориса в пункт С, Анатолий немедленно помчался догонять друзей. Определите, какую долю пути оставалось пройти друзьям Анатолия от момента встречи с ним и Борисом, если известно, что оба катера пришли в пункт В одновременно, расстояние между пунктами В и С равно 2 км, скорости катеров постоянны, а Анатолий, действительно, нигде не задерживался.

Ответ: Одну пятую пути от А до В

Григорий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта А нужно добраться вниз по реке до пункта В, причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Григорий вызвался самостоятельно доехать до пункта В на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта А. Однако, промчавшись шесть километров, Григорий заметил на берегу машущего ему рукой Василия, который просил по старой дружбе довезти его до пункта С. И хоть пункт С Григорий уже проехал, он согласился. По пути в пункт С Григорий с Василием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Григория, откуда те крикнули, что им до пункта В осталась четверть пути и чтобы Григорий нигде не задерживался. Доставив Василия в пункт С, Григорий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами В и С, если известно, что оба катера пришли в пункт В одновременно, скорости катеров постоянны, а Григорий, действительно, нигде не задерживался.

Ответ: 2 км

Борис с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта А нужно добраться вверх по реке до пункта В, причем, в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Борис вызвался самостоятельно доехать до пункта В на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта А. Однако, промчавшись 10 км, Борис заметил на берегу машущего ему рукой Анатолия, который просил по старой дружбе довезти его до пункта С. И хоть пункт С Борис уже проехал, он согласился. По пути в пункт С Борис с Анатолием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Бориса, откуда те крикнули, что пункт В уже совсем близко и чтобы Борис нигде не задерживался. Доставив Анатолия в пункт С, Борис немедленно помчался догонять друзей. Определите, какую долю пути оставалось пройти друзьям Бориса от момента встречи с ним и Анатолием, если известно, что оба катера пришли в пункт В одновременно, расстояние между пунктами В и С равно 2 км, скорости катеров постоянны, а Борис, действительно, нигде не задерживался.

Ответ: Одну шестую пути от А до В

Задача 7.

Из вершины D на плоскость основания ABC пирамиды $ABCD$ опущена высота DH. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HBC$, $\triangle HAC$, $\triangle HAB$ равны соответственно $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, и что все три плоских угла при вершине D прямые.

Ответ: $\frac{2\sqrt[4]{2}}{9\sqrt[4]{3}}$

Из вершины S на плоскость основания KLM пирамиды $KLMS$ опущена высота SH. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HLM$, $\triangle HKM$, $\triangle HKL$ равны соответственно $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{2}$, и что все три плоских угла при вершине S прямые.

Ответ: $\frac{\sqrt[4]{75}}{15}$

Из вершины D на плоскость основания ABC пирамиды $ABCD$ опущена высота DH. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HBC$, $\triangle HAC$, $\triangle HAB$ равны соответственно $\frac{2}{11}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{5}{11}$, и что все три плоских угла при вершине D прямые.

Ответ: $\frac{2\sqrt[4]{110}}{33}$

Из вершины S на плоскость основания KLM пирамиды $KLMS$ опущена высота SH. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HLM$, $\triangle HKM$, $\triangle HKL$ равны соответственно $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$, и что все три плоских угла при вершине S прямые.

Ответ: $\frac{\sqrt[4]{5}}{3\sqrt{6}}$

Задача 8.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\cos(x^2-y^2)} - y\cdot\operatorname{tg}(x^2-y^2) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \\ \dfrac{y}{\cos(x^2-y^2)} - x\cdot\operatorname{tg}(x^2-y^2) = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \end{cases}.$$

Ответ: $x = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\pi}$, $y = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\pi}$

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sin(x^2-y^2)} + y\cdot\operatorname{ctg}(x^2-y^2) = \sqrt{\dfrac{2\pi}{3}} \\ \dfrac{y}{\sin(x^2-y^2)} + x\cdot\operatorname{ctg}(x^2-y^2) = -\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \end{cases}.$$

Ответ: $x = 7\sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $y = -2\sqrt{2\pi}$

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\cos(x^2-y^2)} + y\cdot\operatorname{tg}(x^2-y^2) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \\ \dfrac{y}{\cos(x^2-y^2)} + x\cdot\operatorname{tg}(x^2-y^2) = -\sqrt{\dfrac{\pi}{6}} \end{cases}.$$

Ответ: $x = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $y = -5\sqrt{\frac{\pi}{6}}$

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sin(x^2-y^2)} - y\cdot\operatorname{ctg}(x^2-y^2) = \sqrt{\dfrac{5\pi}{6}} \\ \dfrac{y}{\sin(x^2-y^2)} - x\cdot\operatorname{ctg}(x^2-y^2) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \end{cases}.$$

Ответ: $x = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\pi}$, $y = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\pi}$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ

1. Какое число больше: $\sqrt{\dfrac{6}{7}+7+\dfrac{7}{6}}$ или 3 ?

Решение: Достаточно сравнить подкоренное выражение с 9, то есть выражение $\frac{6}{7}+\frac{7}{6}$ с двойкой. Можно сложить две дроби, а можно заметить, что это сумма взаимно обратных величин, которая по неравенству между средними не меньше двойки и равна ей тогда и только тогда, когда эти величины равны.

Ответ: Первое больше

2. Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac=4$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

Решение: $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=25-8=17$.

Ответ: 17

3. Решите уравнение $\sin 7x+\sin 6x=\sin x$.

Решение:

$$\sin 7x+\sin 6x=\sin x \iff 2\sin\frac{13x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \iff$$

$$\iff \cos\frac{x}{2}\cdot\left(\sin\frac{13x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0 \iff \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{13x}{2}=\frac{x}{2}+2k\pi\\ \frac{13x}{2}=-\frac{x}{2}+(2k+1)\pi\end{array}\right., \quad k\in\mathbb{Z} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}x=(2k+1)\pi\\ 6x=2k\pi\\ 7x=(2k+1)\pi\end{array}\right., \quad k\in\mathbb{Z} \iff \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{3}\\ x=\frac{(2k+1)\pi}{7}\end{array}\right., \quad k\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=\frac{k\pi}{3},\ \frac{(2k+1)\pi}{7},\ k\in\mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $x^2\log_7^2 x+3\log_6^2 x\leqslant x\log_7 x\cdot\log_6 x^4$.

Решение:

$$x^2\log_7^2 x+3\log_6^2 x\leqslant x\log_7 x\cdot\log_6 x^4 \iff (x\log_7 x-3\log_6 x)(x\log_7 x-\log_6 x)\leqslant 0 \iff$$

$$\iff \log_7^2 x\cdot(x-3\log_6 7)(x-\log_6 7)\leqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l}x=1\\ \log_6 7\leqslant x\leqslant 3\log_6 7\end{array}\right.$$

Ответ: $x=1$, $\log_6 7\leqslant x\leqslant 3\log_6 7$

5. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямых AC и BC. На этой окружности выбрана точка D (внутри треугольника), лежащая на расстоянии $\sqrt{2}$ от прямой AB и на расстоянии $\sqrt{5}$ от прямой BC. Найдите угол $\angle DBC$, если известно, что $\angle ABD=\angle BCD$.

Решение: Положим $\angle ABD(=\angle BCD)=\alpha$, $\angle DBC=\beta$. Поскольку угол DAB опирается на дугу DB, а BC — касательная, справедливо $\angle DAB=\angle DBC=\beta$. Аналогично, $\angle CAD=\angle ABD=\alpha$. Тогда из теоремы синусов, примененной к треугольнику ABC, следует, что

$$\frac{AB}{BC}=\frac{\sin(\pi-2\alpha-2\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=2\cos(\alpha+\beta).$$

То же самое можно было бы получить, опустив перпендикуляр из C на AB, поскольку $AC = BC$ как касательные.

С другой стороны, треугольники ABD и BCD подобны (в силу равенства соответствующих углов), откуда

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{DF} = \frac{DE}{DB} \cdot \frac{DB}{DF} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

где DE и DF — перпендикуляры, опущенные из D на AB и BC соответственно.

Получаем

$$2\cos(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

откуда

$$\cos\alpha\sin 2\beta - \sin\alpha(2\sin^2\beta + 1) = 0$$

и

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\beta}{2 - \cos 2\beta}.$$

Поскольку и α, и β ограничены $\pi/2$, выражая $\operatorname{tg}\alpha$ через $\sin\alpha$, получаем

$$\sin\alpha = \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{(2-\cos 2\beta)^2 + \sin^2 2\beta}} = \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{5 - 4\cos 2\beta}} = \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{9 - 8\cos^2\beta}}.$$

Вспоминая, что $DE/DF = \sin(\alpha)/\sin(\beta)$, получаем

$$\frac{DE}{DF} = \frac{2\cos\beta}{\sqrt{9 - 8\cos^2\beta}}.$$

По условию $DE/DF = \sqrt{2/5}$. Следовательно, $\cos^2\beta = 1/2$ и, стало быть, $\beta = \pi/4$.

Ответ: $\pi/4$

6. Василий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта А нужно добраться вниз по реке до пункта В, причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Василий вызвался самостоятельно доехать до пункта В на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта А. Однако, промчавшись восемь километров, Василий заметил на берегу машущего ему рукой Григория, который просил по старой дружбе довезти его до пункта С. И хоть пункт С Василий уже проехал, он согласился. По пути в пункт С Василий с Григорием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Василия, откуда те крикнули, что им до пункта В осталась треть пути и чтобы Василий нигде не задерживался. Доставив Григория в пункт С, Василий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами В и С, если известно, что оба катера пришли в пункт В одновременно, скорости катеров постоянны, а Василий, действительно, нигде не задерживался.

Решение: Пусть v_1 — скорость медленного катера относительно берега, v_2 и v_3 — скорости быстрого катера относительно берега при движении вниз и вверх по реке соответственно. Пусть t_1 — время между общим стартом и встречей Василия и Григория, t_2 — время между встречей Василия и Григория и их встречей со вторым катером, t_3 — время между встречей со вторым катером и прибытием в пункт С и t_4 — время, ушедшее у Василия на дорогу от пункта С до пункта В. Обозначим также через Х место промежуточной встречи катеров. Тогда расстояние от А до Х равно, с одной стороны, $v_1(t_1+t_2)$, а с другой, $v_2t_1 - v_3t_2$. Аналогично, расстояние от Х до В равно, с одной стороны, $v_1(t_3+t_4)$, а с другой, $v_2t_4 - v_3t_3$. При этом первое расстояние по условию в два раза больше второго. Отсюда

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(t_3+t_4) \\ v_2t_1 - v_3t_2 = 2(v_2t_4 - v_3t_3) \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 - 2t_4 = 2t_3 - t_2 \\ t_1 - 2t_4 = (t_2 - 2t_3)\dfrac{v_3}{v_2} \end{cases}.$$

Домножим первое уравнение на $\frac{v_3}{v_2}$ и сложим со вторым. Получим

$$(t_1 - 2t_4)\left(1 + \frac{v_3}{v_2}\right) = 0,$$

откуда $t_1 = 2t_4$, то есть искомое расстояние равно половине от 8 км, то есть равно 4 км.

Ответ: 4 км

7. Из вершины D на плоскость основания ABC пирамиды $ABCD$ опущена высота DH. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HBC$, $\triangle HAC$, $\triangle HAB$ равны соответственно $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, и что все три плоских угла при вершине D прямые.

Решение: Обозначим через α, β, γ двугранные углы при ребрах BC, AC, AB соответственно. Поскольку $DH \perp ABC$, $\triangle HBC$ является ортогональной проекцией $\triangle DBC$. Следовательно, $S(\triangle HBC)/S(\triangle DBC) = \cos\alpha$. С другой стороны, $AD \perp DBC$, то есть $\triangle DBC$ является ортогональной проекцией $\triangle ABC$, откуда $S(\triangle DBC)/S(\triangle ABC) = \cos\alpha$. Учитывая, что $S(\triangle ABC) = S(\triangle ABH) + S(\triangle BCH) + S(\triangle ACH) = 1$, получаем

$$\cos\alpha = S(\triangle DBC) = \frac{S(\triangle HBC)}{S(\triangle DBC)} = \sqrt{S(\triangle HBC)}.$$

Аналогично,

$$\cos\beta = S(\triangle DAC) = \sqrt{S(\triangle HAC)},$$

$$\cos\gamma = S(\triangle DAB) = \sqrt{S(\triangle HAB)}.$$

Далее, поскольку плоские углы при вершине D прямые,

$$V(ABCD) = \frac{1}{6}AD\cdot BD\cdot CD = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{BD\cdot CD}{2}\cdot\frac{AD\cdot CD}{2}\cdot\frac{AD\cdot BD}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{S(\triangle DBC)\cdot S(\triangle DAC)\cdot S(\triangle DAB)} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt[4]{S(\triangle HBC)\cdot S(\triangle HAC)\cdot S(\triangle HAB)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt[4]{\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt[4]{2}}{9\sqrt[4]{3}}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt[4]{2}}{9\sqrt[4]{3}}$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\cos(x^2-y^2)} - y\cdot\operatorname{tg}(x^2-y^2) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \\ \dfrac{y}{\cos(x^2-y^2)} - x\cdot\operatorname{tg}(x^2-y^2) = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \end{cases}.$$

Решение: Рассмотрим сумму и разность первого и второго уравнения:

$$(x+y)\left(\frac{1}{\cos(x^2-y^2)} - \operatorname{tg}(x^2-y^2)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{3}},$$

$$(x-y)\left(\frac{1}{\cos(x^2-y^2)} + \operatorname{tg}(x^2-y^2)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

Перемножим эти два равенства:

$$(x^2 - y^2)\left(\frac{1}{\cos^2(x^2 - y^2)} - \operatorname{tg}^2(x^2 - y^2)\right) = \frac{\pi}{6},$$

откуда $x^2 - y^2 = \pi/6$. Подставляя в исходную систему, получаем

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}x = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \\ 2y - x = \sqrt{\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi} \\ y = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi} \end{cases}.$$

Остается заметить, что полученные значения удовлетворяют условию $x^2 - y^2 = \pi/6$.

Ответ: $x = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi}$, $y = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi}$.